www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MINISTERE DE L'INDUSTRIE
ET DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES D'ALES

CONCOURS D'ADMISSION 1989

EPREUVES ECRITES D'ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

Ces problèmes seront rédigés sur des feuilles de composition séparées :

- feuille rose pour le problème 1
- feuille bleue pour le problème 2.

Les candidats doivent vérifier que les deux problèmes s'étendent sur 8 pages (y compris celle-ci).

N.B. : Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaire, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toute autre documentation est interdite.

PROBLEME 1

Ce problème comprend 3 parties

Première partie - Questions préliminaires

1°) On considère pour tout entier naturel n non nul la fonction f_n définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$$

Démontrer que :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2 \sin x} & \text{si } x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right] \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

On pourra pour cela utiliser la fonction S_n définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}$$

2°) Pour tout couple de réels (a, b) on considère la fonction g définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{ax + bx^2}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right] \\ g(0) = a \end{cases}$$

a) Démontrer que g est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) g' désignant la fonction dérivée de g, calculer g'(x) pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Démontrer que g' est continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Tournez la page S.V.P.

ECOLES NATIONALES SUPERIEURES
des TECHNIQUES INDUSTRIELLES et des MINES d'ALES
page 263
1989 1

3°) On note pour tout entier naturel n non nul :

$$G(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin nx \, dx$$

a) Justifier l'existence de G (n).

b) En utilisant une intégration par parties, démontrer : $\lim_{n \to +\infty} G(n) = 0$

Deuxième partie

L'objet de cette partie est de démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

est convergente vers une limite que l'on se propose de calculer.

1°) Pour tout couple de réels (a, b) et pour tout entier naturel k non nul, on note :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2) \cos 2kx \, dx$$

Déterminer le couple (a, b) pour que l'on ait, pour toute valeur de k : $I_k = \frac{1}{4k^2}$

Dans toute la suite de cette deuxième partie, le couple (a, b) aura la valeur ainsi déterminée.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2) f_n(x) \, dx$

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = 2G(2n+1) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2) \, dx$$

4°) Déduire des résultats précédents que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Troisième partie

L'objet de cette partie est de démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

est convergente vers une limite que l'on se propose de calculer par une méthode analogue à la précédente.

Dans toute cette partie on prend : a = 1 et b = 0.

1°) Calculer pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2kx \, dx$$

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, f_{2n}(x) \, dx$$

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = L - G(4n+1)$$

L étant un réel que l'on précisera.

4°) Déduire des résultats précédents que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Tournez la page S.V.P.

page 264 ECOLES NATIONALES SUPERIEURES
1989 2 des TECHNIQUES INDUSTRIELLES et des MINES: ALES

PROBLEME 2 Ce problème comprend 4 parties.

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n$ ([R) l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout élément M_n de $\mathcal{M}_n$ ([R) on note ${}^tM_n$ la transposée de la matrice M_n.

Une matrice T_n de $\mathcal{M}_n$ ([R) est dite tridiagonale symétrique si et seulement si :

$$T_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

<u>Première partie</u> : Quelques propriétés des matrices tridiagonales symétriques.

On désigne par $\mathcal{T}_n$ ([R) l'ensemble des matrices tridiagonales symétriques de $\mathcal{M}_n$ ([R).

1°) Démontrer que $\mathcal{T}_n$ ([R) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ ([R) dont on précisera une base et la dimension.

2°) Pour $n \geq 4$ soit la famille :

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \ldots T_n .$$

On note D_i le déterminant de T_i pour $2 \leq i \leq n$.

Calculer D_n en fonction de D_{n-1}, D_{n-2}, a_n et b_{n-1}.

3°) En déduire les déterminants des éléments des deux familles suivantes :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \ldots A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 0 \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \ldots B_n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & & 0 \\ 4 & 10 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 4 \\ 0 & & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

<u>Deuxième partie</u> : Résolution d'un système linéaire à matrice tridiagonale symétrique associée.

1°) Déterminer la matrice L triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_4$ ([R) à coefficients positifs telle que :

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & f & c & 0 \\ 0 & 0 & g & d \end{pmatrix} \quad \text{et } L\,{}^tL = A_4 \quad (A_4 \text{ définie au 3° de la première partie})$$

2°) En utilisant la décomposition précédente de A_4, montrer que la résolution d'un système linéaire d'ordre 4 écrit sous la forme matricielle :
$A_4\ X = B$ se ramène à la résolution successive de deux systèmes linéaires d'ordre 4 à matrices triangulaires associées.

X désigne la matrice unicolonne des quatre inconnues

B désigne la matrice unicolonne des quatre constantes du second membre.

3°) Résoudre dans $[R^4$, en appliquant uniquement la méthode précédente, le système linéaire suivant :

Tournez la page S.V.P.

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = 5 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 = 6 \\ 2\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 = -9 \\ 2\,x_3 + 5\,x_4 = -1 \end{cases}$$

Troisième partie : Tridiagonalisation d'une matrice symétrique.

On désigne par $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ la base canonique de $[R^4$.

Si $\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3} + x_4 \vec{e_4}$

et $\vec{y} = y_1 \vec{e_1} + y_2 \vec{e_2} + y_3 \vec{e_3} + y_4 \vec{e_4}$

on note $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

1°) On considère les endomorphismes f et r ' de l'espace vectoriel $[R^4$ dont les matrices associées dans la base B sont respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ \frac{6}{5} & 5 & -\frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} & 0 & \frac{39}{5} \end{pmatrix} \qquad R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & -s' \\ 0 & 0 & s' & c' \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les réels positifs c' et s' tels que :

$$\begin{cases} {}^tR'\,R' = I_4 \\ (f \circ r')(\vec{e_3}) \cdot \vec{e_1} = 0 \end{cases}$$

(I_4 matrice unité de $\mathcal{M}_4([R])$)

b) Calculer alors : $F' = {}^tR'\,F\,R'$. On notera f ' l'endormorphisme de $[R^4$ associé à F ' dans la base B.

2°) Soit r " l'endormorphisme de $[R^4$ de matrice associée dans la base B :

$$R'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c'' & 0 & -s'' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s'' & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les réels positifs c" et s" tels que :

$$\begin{cases} {}^tR''\,R'' = I_4 \\ (f' \circ r'')(\vec{e_4}) \cdot \vec{e_1} = 0 \end{cases}$$

b) Calculer alors : $F'' = {}^tR''\,F'\,R''$

Quatrième partie

Résolution d'un système linéaire à matrice symétrique associée.

En utilisant les résultats des deuxième et troisième parties, résoudre le système linéaire suivant dans $[R^4$:

$$\begin{cases} X_1 + \frac{6}{5} X_2 - \frac{4\sqrt{2}}{5} X_3 + \frac{4\sqrt{2}}{5} X_4 = 5 \\ \frac{6}{5} X_1 + 5\,X_2 - \frac{\sqrt{2}}{5} X_3 - \frac{\sqrt{2}}{5} X_4 = \frac{22}{5} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{5} X_1 - \frac{\sqrt{2}}{5} X_2 + \frac{11}{5} X_3 = -\frac{33\sqrt{2}}{5} \\ \frac{4\sqrt{2}}{5} X_1 - \frac{\sqrt{2}}{5} X_2 + \frac{39}{5} X_4 = -\frac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

page 266 ECOLES NATIONALES SUPERIEURES
1984 4 des TECHNIQUES INDUSTRIELLES et des MINES:ALES

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail